LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$f: U \to V$, U, V jsou vekt. pr. nad P

$\forall u_1, u_2 \in U$, $\forall p \in P$ platí:

$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

$f(p \cdot u_1) = p \cdot f(u_1)$

Pak f se nazývá LINEÁRNÍ.

Ker f ... JÁDRO

Im f ... OBRAZ

Tvrzení $f: U \to V$

a) f je injektivní $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = O$.

b) f je surjekce $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = V$.

Důkaz a) Nechť f je injekce. $u \in \operatorname{Ker} f$.

$f(u) = O$, $f(O) = O \Rightarrow u = O$.

Nechť $\operatorname{Ker} f = O$. Předp., že

$f(u) = f(v)$. Pak $f(u) - f(v) = O$

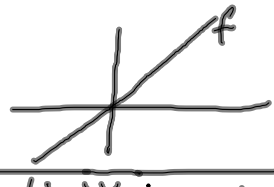
$$f(u - v) = O$$

$\Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow u - v = O \Rightarrow u = v$.

Tvrzení $f: U \to V$ lin. zobr. mezi konečněrozměrnými prostory U, V. Pak $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Definice Bijektivní lineární zobrazení se nazývá IZOMORFISMUS.

Př.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = k \cdot x$, $k \neq 0$.



Tvrzení $f: U \to V$ izomorfismus. Pak f^{-1} je izomorfismus.

Důkaz f^{-1} je bijekce.

$v_1, v_2 \in V \Rightarrow \exists\, u_1, u_2 \in U: f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2$.

$$f^{-1}(v_1 + v_2) = f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = f^{-1}(f(u_1 + u_2)) =$$
$$= u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2).$$

Vekt. prostory, mezi kterými existuje izomorfismus jsou IZOMORFNÍ. $(U \cong V)$

Tvrzení Buďte U, V konečněrozm. vekt. pr., které jsou izomorfní. Pak $\dim U = \dim V$.

Důkaz. Buď $f: U \to V$ izomorf.

$\operatorname{Im} f = V \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

$\operatorname{Ker} f = O \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$

$\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Tvrzení U n-rozm. vekt. pr. nad polem P. Pak U je izomorfní s P^n.

Důkaz $e_1, \dots, e_n$ báze U.

$$f: U \to P^n, \quad u \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

$$u = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n.$$

f je bijektivní a lineární.

Tvrzení Buď $u_1, \dots, u_n$ báze U. Pak ke každé n-tici vektorů $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lin. zobr. $f: U \to V$ tak, že $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.

MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

Souřadnice vektorů budeme zapisovat s horními indexy. $u \ldots (x^1, \ldots, x^n)^T$
SLOUPEC SOUŘADNIC.

U vekt. pr. s bází $e_1, \ldots, e_n$
V vekt. pr. s bází $f_1, \ldots, f_m$
$\alpha : U \longrightarrow V$ lin. zobr.
Matice A typu $m \times n$, jejíž i-tý sloupec je tvořen souřadnicemi vektoru $\alpha(e_i) \in V$ v bázi $f_1, \ldots, f_m$, se nazývá MATICE LIN. ZOBR. α vzhledem k bázím $e_1, \ldots, e_n$ a $f_1, \ldots, f_m$.

<u>Tvrzení</u> $u \in U$, $x = (x^1, \ldots, x^n)^T \in P^n$ je sloupec jeho souřadnic v bázi $e_1, \ldots, e_n$. Buď $v = \alpha(u) \in V$. $y = (y^1, \ldots, y^m)^T \in P^m$ sloupec souřadnic v bázi $f_1, \ldots, f_m$.
Pak $y = A x$.